

ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ.

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $[a,b]$, σύμφωνα με τον διαφορικό λογισμό, για να εντοπίσουμε το μέγιστο και το ελάχιστο της f πρέπει να εξετάσουμε τα κρίσιμα σημεία της στο $[a,b]$, τα άκρα a και b και τα σημεία στα οποία η f δεν παραγωγίζεται

Κρίσιμο σημείο μιας συνάρτησης f είναι ένας αριθμός ξ , τέτοιος ώστε να μηδενίζει την πρώτη παράγωγο της f δηλ $\frac{df(x)}{dx} = 0 \Rightarrow f'(\xi)=0$

Έστω ότι ο αριθμός αυτός και η $f'(\xi)$ υπάρχει, τότε
αν $f'(\xi) \geq 0$ η f έχει τοπικό ελάχιστο στο ξ με ελάχιστη τιμή την $f(\xi)$ και αν
αν $f'(\xi) \leq 0$ η f έχει τοπικό μέγιστο στο ξ με μέγιστη τιμή την $f(\xi)$

πχ έστω η συνάρτηση $f(x)=-2x^2+4x$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $[-2,2]$
τότε σύμφωνα με τα παραπάνω $f'(x)=0 \Rightarrow (-2x^2+4x)'=0 \Rightarrow -4x+4=0 \Rightarrow x=1$
και $f''(x)=(-4x+4)'=-4 \leq 0$ άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο 1 και μέγιστη τιμή
 $f(1)=-2(1)^2+4(1) \Rightarrow f(1)=-2+4 \Rightarrow f(1)=2$
επιπλέον για $x=2 \Rightarrow f(2)=-2 \cdot 4+4 \cdot 2=0 < 2$
και για $x=-2 \Rightarrow f(-2)=-2 \cdot 4-2 \cdot 4=-16 < 2$

Εστω τώρα μια συνάρτηση ταχύτητας $u=u(t)$ για να βρούμε την μέγιστη τιμή της ταχύτητας u_{max} θα πρέπει σύμφωνα με τα προηγούμενα, να μηδενίσουμε τη πρώτη παράγωγο.

δηλ $\frac{dv(t)}{dt} = 0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow \frac{\Sigma F}{m} = 0 \Rightarrow \Sigma F=0$ και προκύπτει έτσι η συνθήκη ευρεσης της μέγιστης

ταχύτητας δηλ έχουμε

$$\mathbf{u=u_{max} \text{ όταν } \Sigma F=0}$$

(η παραπάνω συνθήκη δίνει δεδομένα όπως πχ τη θέση, από τα οποία μπορούμε να βρούμε τη u_{max})

Η επιπλέον συνθήκη της δεύτερης παραγώγου $f''(\xi) \leq 0$ μπορεί να μένει ανενεργή σε πολλά προβλήματα, εξαιτίας των δεδομένων του προβλήματος πχ ένα σώμα κάνει επιταχυνόμενη και μετά επιβραδυνόμενη κίνηση άρα η συνθήκη $\Sigma F=0$ θα μας δώσει τη μέγιστη ταχύτητα η το αντίστροφο δηλ να κάνει επιβραδυνόμενη και μετά επιταχυνόμενη, εδώ η συνθήκη $\Sigma F=0$ θα μας δώσει την ελάχιστη ταχύτητα

πχ Έστω ένα σώμα εκτελεί ΑΑΤ με $u=10\cos 2\pi t$ (S.I.) από την δοθείσα σχέση είναι προφανές ότι η μέγιστη ταχύτητα δηλ η μέγιστη τιμή της $u(t)$ είναι το 10m/s αφού $(\cos 2\pi t)_{max} = 1$

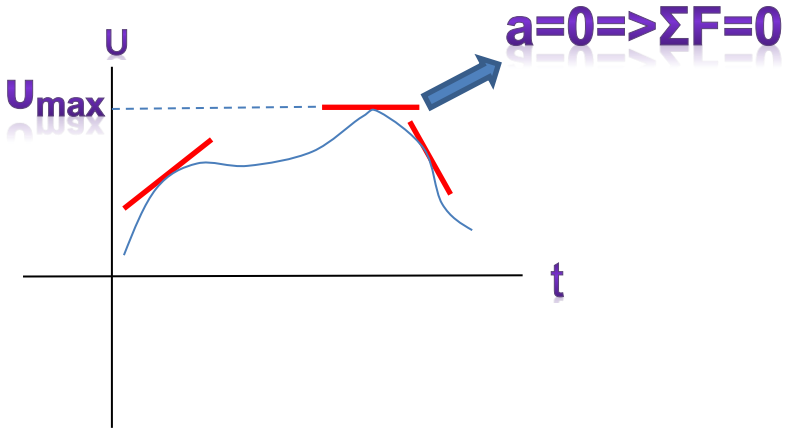
Αν ακολουθήσουμε την προηγούμενη μελέτη για να βρούμε τη u_{max} πρέπει $\frac{dv(t)}{dt} = 0$
 $\Rightarrow (10\cos 2\pi t)' = 0 \Rightarrow -2\pi 10\sin 2\pi t = 0 \Rightarrow \sin 2\pi t = 0 \Rightarrow \sin 2\pi t = \sin 0 \Rightarrow 2\pi t = 2\pi k + 0$ ή
 $2\pi t = 2\pi k + \pi - 0$ συνολικά $2\pi t = \pi k \Rightarrow t = \frac{k}{2}$ όπου $k = 0,1,2,3..$

και $\frac{d^2v(t)}{dt^2} \leq 0 \Rightarrow (-2\pi 10\sin 2\pi t)' \leq 0 \Rightarrow$

$-4\pi^2 10\cos 2\pi t \leq 0 \Rightarrow \cos 2\pi t \geq 0 \Rightarrow \cos \pi k \geq 0 \Rightarrow k=0,2,4,6..$

Έτσι η u_{max} θα ισούται με $u=10\cos 2\pi t \Rightarrow u_{max}=10\cos \pi k = 10\text{m/s}$ αφού $k=0,2,4..$

Ποιοτικά έστω μια γραφική παράσταση $u=u(t)$, η κλίση σε κάθε σημείο της γραφικής παράστασης δίνει την επιτάχυνση, στα μέγιστα της καμπύλης επειδή αλλάζει η κλίση και από πχ θετική γίνεται αρνητική θα έχουμε κλίση μηδέν δηλ επιτάχυνση μηδέν και συνεπώς $\Sigma F=0$ άρα u_{max} όταν $\Sigma F=0$



physicsT